INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protectia mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A IX-A

1. O barcă merge pe un râu în aval (în sensul curgerii râului) și în amonte (în sens opus curgerii râului), parcurgând în total $56\,km$ în 3 ore. Viteza bărcii în aval este de 20 km/h iar în amonte de 16 km/h. Se cere:

a) Determinați viteza curentului apei pe râu și viteza pe care ar fi avut-o barca dacă s-ar fi deplasat uniform, în aceleași condiții, pe un lac.

b) Determinați cele două distanțe parcurse de barcă pe râu, prima în aval și a doua în amonte.

Soluție:

a) Considerând v_a viteza apei și v_b viteza bărcii în cazul deplasării pe un lac, atunci:

- când barca se deplasează în aval, viteza de deplasare rezultantă este $v_b + v_a = 20$ 1p
- când barca se deplasează în amonte, viteza de deplasare rezultantă este $v_b - v_a = 16$ 1p

deci $v_b = 18km/h$ și $v_a = 2km/h$ 1p

b) Dacă t_1 este durata deplasării în aval iar t_2 durata deplasării în amonte, respectiv d_1 distanța parcursă în aval iar d_2 distanța parcursă în amonte, atunci:

$t_1 + t_2 = 3$ și $d_1 + d_2 = 20 \cdot t_1 + 16 \cdot t_2 = 56$, ... 1p

din care se obțin $t_1 = 2$ și $t_2 = 1$ 1p

și astfel $d_1 = 40km$ 1p

și $d_2 = 16km$ 1p

2. Fie patrulaterul convex $ABCD$ și $M \in (AC)$, $N \in (BD)$ mijloacele diagonalelor.

a) Arătați că $2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$.

b) Dacă punctele M și N coincid, demonstrați că $ABCD$ este paralelogram.

Soluție:

a) $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN}$ 1p

$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN}$ 1p

dar $M \in (AC)$ și $N \in (BD)$ fiind mijloacele acestor segmente, $\overrightarrow{MA} + \overrightarrow{MC} = \vec{0}$ și $\overrightarrow{BN} + \overrightarrow{DN} = \vec{0}$

.... 1p

$\Rightarrow\ 2 \cdot \overrightarrow{MN} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD}$ 1p

b) Dacă M și N coincid, $\overrightarrow{MN} = \vec{0}$ 1p

$\Rightarrow\ \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CD} = \vec{0} \ \Rightarrow\ \overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ 1p

$ABCD$ este paralelogram 1p

Soluție alternativă: Dacă M și N coincid atunci (AC) și (BD) se intersectează la jumătate, deci în acest caz $ABCD$ este paralelogram.

3. În cadrul unui studiu demografic s-a constatat că numărul a_n de locuitori ai unei localități nou înființate, în care $n \in \mathbb{N}$ este numărul de ani scurs de la înființarea localității, este modelat prin relația $a_{n+1} - a_n = 2n - 11$, cu număr de locuitori inițial $a_0 = 100$.

a) Aflați, prin această relație, câți locuitori ar avea localitatea după doi ani de la înființare.

b) Arătați că $a_n = n^2 - 12n + 100$, pentru orice $n \in \mathbb{N}$.

c) Determinați numărul minim de locuitori pe care îl poate atinge localitatea.

d) Arătați că, începând cu al șaselea an, populația localității este în creștere an de an.

e) Aflați după câți ani localitatea are mai mult de 1000 de locuitori.

Soluție:

a) $a_1 = a_0 - 11 = 89$ 1p

$a_2 = a_1 - 9 = 80$ 1p

b) Demonstrație prin inducție

$a_1 = 1^2 - 12 \cdot 1 + 100 = 89$ 1p

$a_{k+1} = a_k + 2k - 11 = (k^2 - 12k + 100) + 2k - 11 = (k+1)^2 - 12(k+1) + 100$, finalizare 1p

Soluție alternativă:

$$\left.\begin{aligned} a_1 - a_0 &= 2 \cdot 0 - 11 \\ a_2 - a_1 &= 2 \cdot 1 - 11 \\ a_3 - a_2 &= 2 \cdot 2 - 11 \\ &\dots\dots \\ a_n - a_{n-1} &= 2 \cdot (n-1) - 11 \end{aligned}\right\} \overset{(+)}{\Rightarrow} a_n - 100 = 2 \cdot \frac{(n-1) \cdot n}{2} - 11 \cdot n \Rightarrow a_n = n^2 - 12n + 100$$

c) Cum $a_n = (n-6)^2 + 64 \geq 64$, numărul minim de locuitori este 64 .... 1p

Soluție alternativă: $a_n = f(n)$, $f(n) = n^2 - 12n + 100$ este funcție de gradul doi care își atinge minim în $n = 6$, valoarea minimului fiind $f(6) = 64$.

d) Pentru $n \geq 6$, $a_{n+1} - a_n = 2n - 11 \geq 1 \Rightarrow a_{n+1} > a_n$ 1p

Soluție alternativă: $f(n) = n^2 - 12n + 100$ este strict crescătoare pe $[6; +\infty)$.

e) $a_n > 1000 \Leftrightarrow (n-6)^2 + 64 > 1000 \Leftrightarrow (n-6)^2 > 936 \Rightarrow (n-6) \geq 31 \Leftrightarrow n \geq 37$ 1p

Soluție alternativă: $f(n) = n^2 - 12n + 100 > 1000 \Leftrightarrow n^2 - 12n - 900 > 0 \Rightarrow n_{1,2} = 6 \pm \sqrt{936} \Rightarrow$ din semnul funcției de gradul doi și $n \in \mathbb{N}$ se obține $n \geq 37$.

4. Deși aparent între prima și celelalte cerințe ale următorului enunț nu este nici o legătură, rezolvarea vă va convinge de contrariul.

a) Arătați că $|x| + |y| \geq |x - y|$, pentru orice $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Demonstrați că, pentru orice $x \in \mathbb{R}$, au loc inegalitățile:

$|x-1| + |x-2015| \geq 2014$ și $|x-2| + |x-2014| \geq 2012$.

c) Demonstrați că, pentru orice număr $x \in \mathbb{R}$, are loc inegalitatea:

$|x-1| + |x-2| + \ldots + |x-2015| \geq 1007 \cdot 1008$.

d) Rezolvați ecuația $|x-1|+|x-2|+...+|x-2015|=1007\cdot 1008$, în necunoscuta $x\in\mathbb{R}$.

<u>Soluție:</u>

a) Cum ambii membrii ai inegalității sunt nenegativi, $|x|+|y|\ge|x-y| \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow |x|^2+2\cdot|x|\cdot|y|+|y|^2\ge(|x-y|)^2 \Leftrightarrow x^2+2\cdot|x|\cdot|y|+y^2\ge x^2+2\cdot x\cdot y+y^2 \Leftrightarrow |x|\cdot|y|\ge x\cdot y$

care este evident adevărată. 1p

<u>Soluții alternative</u>:

1. $|x|+|y|\ge|x-y| \Leftrightarrow |x|+|(-y)|\ge|x+(-y)|$, care este justificată de $|a+b|\le|a|+|b|$, $(\forall)a,b\in\mathbb{R}$.

2. Cu interpretarea geometrică a modulului unui număr real, $|x|+|y|\ge|x-y| \Leftrightarrow$ $d(x;\,0)+d(y;\,0)\ge d(x;\,y)$, inegalitate care este evidentă, unde $d(a;\,b)$ este dinstața dintre "a" şi "b" pe axa reală.

b) Folosind a) se obțin $|x-1|+|x-2015|\ge|(x-1)-(x-2015)|=2014$ și analog

$|x-2|+|x-2014|\ge 2012$ 2p

c) Folosind a) se obține:

$$\left.\begin{array}{r}|x-1|+|x-2015|\ge 2014\\ |x-2|+|x-2014|\ge 2012\\ \dots\dots\dots\dots\\ |x-1007|+|x-1009|\ge 2\\ |x-1008|\ge 0\end{array}\right\}\Rightarrow |x-1|+|x-2|+...+|x-2015|\ge 2\cdot(1+2+3+...+1007)$$ 1p

$\Rightarrow |x-1|+|x-2|+...+|x-2015|\ge 1007\cdot 1008$ 1p

d) Egalitatea se obține când toate inegalitățile din sistem devin egalități 1p

$$\left.\begin{array}{r}|x-1|+|x-2015|=2014\\ |x-2|+|x-2014|=2012\\ \dots\dots\dots\dots\\ |x-1007|+|x-1009|=2\\ |x-1008|=0\end{array}\right\}\Rightarrow x=1008$$ 1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR
JUDEȚEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA
CONSTRUCȚII DE MAŞINI
ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protectia mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A X-A

1. Numerele reale a,b,c verifică simultan relațiile $2^a=12$, $8^b=6$ și $27^c=9$. Arătați că:
a) Are loc egalitatea $2a=6b+3c$.
b) Numerele a și b sunt iraționale $\left(a,\ b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\right)$ iar c este rațional $\left(c\in\mathbb{Q}\right)$.
c) Are loc inegalitatea $a+b+c>5$.

<u>Soluție:</u>

a) Cum $2^a=12\ \Rightarrow\ a=\log_2 12=2+\log_2 3$ 1p

$8^b=6\ \Rightarrow\ b=\log_8 6=\log_{2^3}6=\frac{1}{3}\left(1+\log_2 3\right)$ 1p

$27^c=9\ \Rightarrow\ c=\log_{27}9=\log_{3^3}3^2=\frac{2}{3}$ 1p

și astfel se confirmă $2a=6b+3c$ 1p

b) $c=\frac{2}{3}\in\mathbb{Q}$ 1p

Presupunând $a=2+\log_2 3\in\mathbb{Q}$ obținem $\log_2 3\in\mathbb{Q}$ și putem scrie $\log_2 3=\frac{p}{q}$, $p\in\mathbb{N}$, $q\in\mathbb{N}^*$ $\Leftrightarrow$ $3^q=2^p$, ceea ce nu este posibil deoarece 3^q este număr natural impar iar 2^p este număr natural par. Analog, presupunând $b=\frac{1}{3}\left(1+\log_2 3\right)\in\mathbb{Q}$ obținem $\log_2 3\in\mathbb{Q}$ 1p

Numerele a și b sunt iraționale $\left(a,\ b\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}\right)$ iar c este rațional $\left(c\in\mathbb{Q}\right)$.

c) Avem $a+b+c>5\ \Leftrightarrow\ 2\log_2 3>3\ \Leftrightarrow\ \log_2 9>3\ \Leftrightarrow\ 9>8$ 1p

2. Deși aparent între cerința I și cerințele II ale următorului enunț nu este nici o legătură, rezolvarea vă va convinge de contrariul.
I. Dacă $z\in\mathbb{C}$, atunci $|z|<1$ dacă și numai dacă $|2-z\cdot i|>|2z+i|$.
II. Dacă z este un număr complex astfel încât $2z^5+z^4\cdot i+z\cdot i-2=0$, arătați că:
a) $z\neq-\frac{1}{2}\cdot i$;

b) $z^4=\dfrac{2-z\cdot i}{2\cdot z+i}$;

c) $|z|=1$.

Soluție:

I. Considerând $z=a+bi$, $a, b\in\mathbb{R}$, atunci $|2-z\cdot i|>|2z+i| \Leftrightarrow$

$\sqrt{(2+b)^2+a^2}>\sqrt{(2a)^2+(2b+1)^2}$ 1p

$\Leftrightarrow\ 1>a^2+b^2$ 1p

$\Leftrightarrow\ |z|<1$ 1p

II. a) Considerând $z=-\dfrac{1}{2}\cdot i \Rightarrow 2z^5+z^4\cdot i+z\cdot i-2=-\dfrac{1}{16}i+\dfrac{1}{16}i+\dfrac{1}{2}-2\neq 0$, deci $z=-\dfrac{1}{2}\cdot i$ nu verifică $2z^5+z^4\cdot i+z\cdot i-2=0$, ceea ce confirmă $z\neq-\dfrac{1}{2}\cdot i$ 1p

b) $2z^5+z^4\cdot i+z\cdot i-2=0 \Rightarrow z^4(2z+i)=2-z\cdot i$ și cum $2z+i\neq 0 \Rightarrow z^4=\dfrac{2-z\cdot i}{2\cdot z+i}$ 1p

c) Considerând $z\in\mathbb{C}$ încât $2z^5+z^4\cdot i+z\cdot i-2=0$, atunci:

$|z|<1 \Leftrightarrow |2-z\cdot i|>|2z+i| \Leftrightarrow \dfrac{|2-z\cdot i|}{|2z+i|}>1 \Leftrightarrow \left|\dfrac{2-z\cdot i}{2z+i}\right|>1$, dar $\left|\dfrac{2-z\cdot i}{2z+i}\right|=|z^4|=|z|^4$ și astfel $\left|\dfrac{2-z\cdot i}{2z+i}\right|>1 \Leftrightarrow |z|>1$, contradicție 2p

3. La un concurs de matematică s-au dat trei probleme și fiecare elev participant a rezolvat complet cel puțin una din problemele date. Premiile au constat în cărți și fiecare participant a primit un număr de cărți egal cu numărul de probleme rezolvate complet de el. Totodată, se știu și următoarele:

- o fracțiune de $\dfrac{5}{12}$ din numărul participanților la concurs au rezolvat complet doar primele două probleme;
- o fracțiune de $\dfrac{1}{6}$ din numărul participanților la concurs au rezolvat doar prima și a treia problemă;
- o fracțiune de $\dfrac{2}{15}$ din numărul participanților la concurs a rezolvat complet doar a doua și a treia problemă;
- doar 6 participanți la concurs au rezolvat complet toate cele trei probleme.

Dacă la festivitatea de premiere s-au acordat cu titlu de premiu 1042 de cărți, aflați câți elevi au participat la concurs.

Soluții:

Fie: x numărul de elevi care au rezolvat doar problema 1

y numărul de elevi care au rezolvat doar problema 2

z numărul de elevi care au rezolvat doar problema 3

a numărul de elevi care au rezolvat doar problemele 1 și 2

b numărul de elevi care au rezolvat doar problemele 1 și 3

c numărul de elevi care au rezolvat doar problemele 2 și 3 .... 1p

Dacă n este numărul total de elevi, $n=x+y+z+a+b+c+6$ 1p

și cum $a=\dfrac{5n}{12}$, $b=\dfrac{n}{6}$, $c=\dfrac{2n}{15}$ .... 1p se obține $a+b+c=\frac{43n}{60}$ 1p

și $x+y+z=n-\frac{43n}{60}-6=\frac{17n}{60}-6$ 1p

și cum $1042=3\cdot 6+2(a+b+c)+(x+y+z)$ 1p

rezultă $1042=18+2\cdot\frac{43n}{60}+\left(\frac{17n}{60}-6\right) \Rightarrow n=600$ 1p

4. Fie n un număr natural, $n\geq 2$ și a_n numărul tuturor numerelor de n cifre, care au produsul cifrelor egal cu 8. Se cere:

a) Determinați a_2 și a_3.

b) Demonstrați că pentru orice $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$, $a_n=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

c) Aflați n pentru care $a_n=120$.

<u>Soluție:</u>

a) Numerele $\overline{ab}$ cu $a\cdot b=8$ sunt 18, 24, 42, 81, deci $a_2=4$ 1p

Numerele $\overline{abc}$ cu $a\cdot b\cdot c=8$ sunt 118, 181, 124, 142, 214, 222, 241, 412, 421, 811, deci $a_3=10$ 2p

b) Dacă $\overline{a_1a_2...a_n}$ este un număr cu $n\in\mathbb{N}^*$ cifre și $a_1\cdot a_2\cdot ...\cdot a_n=8$, avem posibilitățile:

- o cifră este 8 și restul sunt 1, cu n posibilități;
- o cifră este 2, alta este 4 și restul sunt 1, cu A_n^2 posibilități;

.... 1p

- trei cifre sunt egale cu 2 şi restul sunt 1, cu C_n^3 posibilități.

Deci $a_n=n+A_n^2+C_n^3=\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$ 1p

c) $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}=120 \Rightarrow n(n+1)(n+2)=720$ verificată de $n=8$ 1p

și cum $f(n)=n(n+1)(n+2)$, $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ este strict crescătoare, $n=8$ este singura soluție 1p

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XI-A

1. Fie matricea $M=\begin{pmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ x & y & 1\end{pmatrix}$ şi punctele $A(1;\,2)$, $B(0;\,3)$, $C_n(2n-2;5-2n)$, $n\in\mathbb{N}$, reprezentate în reperul cartezian xOy. Se cere:

a) Să se calculeze determinantul matricei M.

b) Să se arate că punctele $A,\ B$ şi C_n sunt coliniare, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$.

c) Să se determine valorile $n\in\mathbb{N}$ pentru care aria triunghiului AOC_n este minimă.

<u>Soluţie:</u>

a) $\det M=\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ x & y & 1\end{vmatrix}=3+2x+0-3x-y-0$ 1p

$=3-x-y$ 1p

b) $A,\ B$ şi C_n sunt coliniare $\Leftrightarrow \begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 3 & 1\\ 2n-2 & 5-2n & 1\end{vmatrix}=0$, oricare ar fi $n\in\mathbb{N}$ 1p

$\Leftrightarrow 3+2(2n-2)-3(2n-2)-(5-2n)=0 \Leftrightarrow 3+4n-4-6n+6-5+2n=0$, care se confirmă 1p

c) $A(AOC_n)=\frac{1}{2}\cdot|\Delta|$, cu $\Delta\begin{vmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\\ 2n-2 & 5-2n & 1\end{vmatrix}=6n-9$, deci $A(AOC_n)=\frac{3}{2}\cdot|2n-3| \Rightarrow$

$\Rightarrow$ cum $n\in\mathbb{N}$, $A(AOC_n)$ este minimă în situaţiile $|2n-3|=1$ 1p

$\Rightarrow 2n-3\in\{-1;\,1\} \Rightarrow n\in\{1;\,2\}$ 2p

2. I. Calculați limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{10-3x}}{x+1-\sqrt{x+7}}$;

b) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+400x-1}{x^2-3x+2}\right)^{5x}$

II. Fie $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ o funcție care, pentru orice $x\in\mathbb{R}$, verifică relația $\left|f(x)-e^x\right|\le x^2$. Arătați că:

a) f este continuă în $x=0$

b) f este derivabilă în $x=0$ și $f'(0)=1$

<u>Soluție:</u>

I. a) Nedeterminare $\frac{0}{0}$ care se elimină prin amplificările următoare, urmate de simplificare cu $(x-2)$: $\lim\limits_{x\to 2}\frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{10-3x}}{x+1-\sqrt{x+7}}=\lim\limits_{x\to 2}\frac{\left[(x+2)-(10-3x)\right]\cdot\left(x+1+\sqrt{x+7}\right)}{\left[(x+1)^2-(x+7)\right]\cdot\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{10-3x}\right)}=$

$=\lim\limits_{x\to 2}\frac{4(x-2)}{(x-2)(x+3)}\cdot\lim\limits_{x\to 2}\frac{x+1+\sqrt{x+7}}{\sqrt{x+2}+\sqrt{10-3x}}=\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{4}=\frac{6}{5}$ 2p

b) Nedeterminare 1^∞, $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+400x-1}{x^2-3x+2}\right)^{5x}=\lim\limits_{x\to\infty}\left\{\left[1+a(x)\right]^{\frac{1}{a(x)}}\right\}^{a(x)\cdot 5x}=e^L$,

cu $a(x)=\frac{x^2+400x-1}{x^2-3x+2}-1=\frac{403x-3}{x^2-3x+2}$ 1p

cu $L=\lim\limits_{x\to\infty}\left(a(x)\cdot 5x\right)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{5x(403x-3)}{x^2-3x+2}=2015$, deci limita este e^{2015} 1p

II. a) Pentru $x=0$, din $\left|f(x)-e^x\right|\le x^2 \Rightarrow \left|f(0)-1\right|\le 0 \Rightarrow f(0)=1$ 1p

Având $-x^2\le f(x)-e^x\le x^2 \Rightarrow e^x-x^2\le f(x)\le e^x+x^2$ și din încadrare, prin trecere la limită, rezultă $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=1$, deci f este continuă în $x=0$ 1p

b) f este derivabilă în $x=0 \Leftrightarrow$ există $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=l\in\mathbb{R}$, dar din încadrarea $e^x-x^2\le f(x)\le e^x+x^2$ și $f(0)=1$ deducem $\frac{e^x-1}{x}-x\le\frac{f(x)-f(0)}{x-0}\le\frac{e^x-1}{x}+x$ pentru $x>0$ și inegalitate invers orientată pentru $x<0$, $\Rightarrow \lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=1$, deci se confirmă că f este derivabilă în $x=0$ și $f'(0)=1$ 1p

3. a) Arătați că există o infinitate de matrice $A\in M_2(\mathbb{R})$ cu proprietatea $A^2=I_2$.

b) Fie $B=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$. Arătați că $B^3=I_3$.

c) Demonstrați că există o infinitate de matrice $C\in M_3(\mathbb{R})$ cu proprietatea $C^3=I_3$.

Soluție:

a) Fie $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^2=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix}$ și $A^2=I_2 \Leftrightarrow \begin{cases} a^2+bc=1 \\ d^2+bc=1 \\ b(a+d)=0 \\ c(a+d)=0 \end{cases}$.

Alegând $a+d=0$, dacă $a^2+bc=1 \Rightarrow d^2+bc=1$ și astfel, spre exemplu cu $a=1$, $d=-1$ și $bc=0$ (având o infinitate de posibilități de alegere $bc=0$) obținem o infinitate de matrici $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ cu $A^2=I_2$.

De pildă, matricile $A=\begin{pmatrix} 1 & n \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ verifică $A^2=I_2$.

Un exemplu de matrice $A\neq I_2$ cu $A^2=I_2$ 1p

Arată că există o infinitate de matrici $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ cu $A^2=I_2$ 2p

<u>Soluție alternativă</u>:

$A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow A^2=Tr(A)\cdot A-det(A)\cdot I_2 \Rightarrow$ suficient $Tr(A)=a+d=0$ și $det(A)=-1 \Rightarrow$ $a^2+bc=1$.

b) $B^2=\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ 1p

$B^3=B^2\cdot B=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=I_3$ 1p

c) Considerând $C=\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow C^3=\begin{pmatrix} abc & 0 & 0 \\ 0 & abc & 0 \\ 0 & 0 & abc \end{pmatrix}=abc\cdot I_3 \Rightarrow$ suficient ca $abc=1$

.... 2p

4. În condiții de laborator, o populație de bacterii se dezvoltă după legea $N(t)=50t-e^{0,5t}+2015-200\cdot\ln 10$, unde t este timpul măsurat în ore iar $N(t)$ este numărul de indivizi la momentul t.

a) Folosind eventual mărginirea $e>2,5$ a bazei e a logaritmului natural, arătați că la momentul inițial $t=0$ populația de bacterii are mai mult de 1400 de indivizi.

b) Aflați care este numărul maxim de indivizi la care poate ajunge populația de bacterii.

c) Demonstrați că, în aceste condiții, după un anumit timp populația de bacterii dispare.

Soluție:

a) La momentul inițial $t=0$ populația de bacterii are un număr de indivizi $N(0)=2014-200\cdot\ln 10$ .... 1p și $N(0) > 1400$, fapt implicat de $\ln 10 < 3 \Leftrightarrow 10 < e^3$, care se confirmă. Aceasta deoarece $e > \frac{5}{2} \Rightarrow e^3 > \left(\frac{5}{2}\right)^3 = \frac{125}{8} > 10$ 1p

b) $N : [0; +\infty) \to \mathbb{R}$ este derivabilă pe $[0; +\infty)$, cu $N'(t) = 50 - 0,5 \cdot e^{0,5t}$, ... 1p

cu $N'(t) = 0$ în $t = 4 \cdot \ln 10 \Rightarrow$ tabel de variație cu $t = 4 \cdot \ln 10$ punct de maxim absolut 1p

deci numărul maxim de indivizi este $N(4 \cdot \ln 10) = 1915$ 1p

c) Populația de bacterii dispare dacă există $t_0 \geq 0$ cu $N(t_0) = 0$ 1p

Cum $N(0) > 0$ și $\lim\limits_{t \to \infty} N(t) = -\infty$, conform continuității funcției N, va exista $t_0 > 0$ cu $N(t_0) = 0$, ceea ce confirmă că populația de bacterii dispare 1p

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN IAŞI

CONCURSUL NAȚIONAL DE MATEMATICĂ APLICATĂ *"ADOLF HAIMOVICI"*

ETAPA NAȚIONALĂ
2 mai 2015

FACULTATEA CONSTRUCȚII DE MAŞINI ŞI MANAGEMENT INDUSTRIAL

Filiera tehnologică: profilul servicii, resurse naturale și protectia mediului

BAREM DE CORECTARE ŞI NOTARE
CLASA A XII-A

1. Fie mulțimea $G=\left\{a+b\sqrt{7}\,/\,a,\,b\in\mathbb{Z} \text{ și } a^2-7b^2=1\right\}$

a) Arătați că operația de înmulțire a numerelor reale este lege de compoziție pe G și $(G;\,\cdot)$ este grup abelian.

b) Determinați un element $x\in G$, $x=a+b\sqrt{7}$, cu $a>0$ și $b>0$.

c) Arătați că mulțimea G are o infinitate de elemente.

<u>Soluție:</u>

a) Considerând două elemente din G, respectiv $x_1=a_1+b_1\sqrt{7}$ și $x_2=a_2+b_2\sqrt{7}$, obținem $x_1\cdot x_2=x_3$, cu x_3 de forma $x_3=a_3+b_3\sqrt{7}$, în care $a_3=a_1a_2+7b_1b_2$ și $b_3=a_1b_2+a_2b_1$.

Pentru buna definire mai rămâne de verificat implicația $\left.\begin{array}{l}a_1^2-7b_1^2=1\\ a_2^2-7b_2^2=1\end{array}\right\}\Rightarrow a_3^2-7b_3^2=1$, care se confirmă deoarece $a_3^2-7b_3^2=\left(a_1a_2+7b_1b_2\right)^2-7\left(a_1b_2+a_2b_1\right)^2=\left(a_1^2-7b_1^2\right)\cdot\left(a_2^2-7b_2^2\right)=1$

.... 1p

Pentru confirmarea structurii de grup abelian $(G;\,\cdot)$, cum $(G;\,\cdot)\subset(\mathbb{R};\,\cdot)$, comutativitatea și asociativitatea sunt implicate de incluziune 1p

și cum $1=1+0\cdot\sqrt{7}$, $1^2-7\cdot 0^2=1 \Rightarrow$ element neutru $e=1$ 1p

iar dacă $x=a+b\sqrt{7}$, atunci $x'=\dfrac{1}{a+b\sqrt{7}}=a-b\sqrt{7}\in G$ este simetricul lui x 1p

b) Spre exemplu, $x=8+3\sqrt{7}\in G$, deoarece verifică cerințele elementelor din G 1p

c) Cu exemplul ales $x=8+3\sqrt{7}\in G$, cum $|x|\notin\{0;\,1\} \Rightarrow x^n\neq x^p$, oricare ar fi $n,\,p\in\mathbb{N}^*$ cu $n\neq p$, ... 1p

dar "$\cdot$" fiind lege de compoziție pe G, evident $x\in G \Rightarrow x^n\in G$, ceea ce confirmă că G are o infinitate de elemente 1p

2. Rata de creștere a populației unei localități, notată $f(t)$, verifică relația $(2t+1)f(t)=f'(t)\cdot\left(t^2+t+10\right)$, unde $t\geq 0$ reprezintă timpul, măsurat în ani, scurs de la momentul $t=0$ care corespunde anului 2000.

a) Determinați mulțimea primitivelor funcției $g:[0;\,+\infty)\to\mathbb{R}$, $g(t)=\dfrac{2t+1}{t^2+t+10}$.

b) Arătați că există $k>0$ încât $f(t)=k\cdot\left(t^2+t+10\right)$, pentru orice $t\geq 0$.

c) Dacă în anul 2015 numărul de locuitori al localității, verificat prin legea $f(t)$, este de 25000 de locuitori, aflați care va fi numărul de locuitori estimat cu această lege pentru anul 2030.

Soluție:

a) Mulțimea primitivelor funcției g este $\int g(t)\,dt=\ln\left(t^2+t+10\right)+C$, $C\in\mathbb{R}$ 2p

b) Din $(2t+1)f(t)=f'(t)\cdot\left(t^2+t+10\right)\ \Rightarrow\ \dfrac{f'(t)}{f(t)}=\dfrac{k(2t+1)}{k\left(t^2+t+10\right)}\ \Rightarrow\ \ln f(t)=\ln\left(t^2+t+10\right)+C$

.... 1p

$\Rightarrow\ \ln f(t)=\ln\left[\left(t^2+t+10\right)\cdot e^C\right]\ \Rightarrow$ există $k=e^C>0$ încât $f(t)=k\cdot\left(t^2+t+10\right)$, pentru orice $t\geq 0$ 1p

c) Cum $t=0$ corespunde anului 2000 $\Rightarrow$ anului 2015 îi corespunde $t=15$ și astfel $f(15)=25000$ 1p

$\Rightarrow\ k\cdot\left(15^2+15+10\right)=25000\ \Rightarrow\ k=100$ 1p

$\Rightarrow\ f(t)=100\left(t^2+t+10\right)$ și numărul de locuitori estimat pentru anul 2030 este

$f(30)=94000$ 1p

3. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+2$

a) Calculați $\int\limits_{-1}^{10} e^x\cdot f(x)\,dx$.

b) Considerând suprafața plană delimitată de axa Ox, graficul funcției f și dreptele de ecuație $x=0$ și $x=4$, determinați $a>0$ pentru care dreapta de ecuație $x=a$ împarte această suprafață în două suprafețe de arii egale.

c) Determinați $b\in\mathbb{R}$ pentru care volumul corpului obținut prin rotația în jurul axei Ox a graficului funcției $g:[0;1]\to\mathbb{R}$, $g(x)=f(bx)$ este minim.

Soluție:

a) $\int\limits_{-1}^{10} e^x\cdot f(x)\,dx=\int\limits_{-1}^{10}(x+2)e^x\,dx=\ldots=(x+1)e^x\Big|_{-1}^{10}=11\cdot e^{10}$ 3p

b) Condiția impune $\int\limits_0^a f(x)\,dx=\int\limits_a^4 f(x)\,dx$ 1p

din care se obține $a^2+2a=16-\dfrac{a^2}{2}-2a$, $\Rightarrow\ a^2+4a-16=0$ cu rădăcinile $a_{1,2}=-2\pm2\sqrt{5}$.

Cum în mod necesar $a\in(0;4)$ $a=2\left(\sqrt{5}-1\right)$ 1p

c) $V(b)=\pi\int\limits_0^1 g^2(x)\,dx=\pi\int\limits_0^1 f^2(bx)\,dx=\pi\int\limits_0^1(bx+2)^2\,dx=\pi\left(\dfrac{b^2}{3}+2b+4\right)$ 1p

$\Rightarrow\ V(b)=\dfrac{\pi}{3}b^2+2\pi b+4\pi$, care este funcție de gradul doi și își atinge minimul în $b=-3$

.... 1p

4. Fie polinomul $f = 3X^3 - aX^2 + aX - 3$, $a \in \mathbb{R}$.

a) Arătați că f se divide cu polinomul $g = X - 1$.

b) Determinați pentru ce valori $a \in \mathbb{R}$ ecuația $f(x) = 0$ are trei rădăcini reale.

c) Determinați $a \in \mathbb{R}$ pentru care $|x_1| + |x_2| + |x_3| = 3$,unde $x_1,\ x_2,\ x_3$ sunt rădăcinile polinomului *f*.

Soluții:

a) Deoarece $f(1) = 0 \Rightarrow f$ se divide cu $g = X - 1$ 1p

b) Conform cu punctul anterior $f(x) = (x-1)\left(3x^2 - (a-3)x + 3\right)$ și $f(x) = 0$ are $x_1 = 1 \in \mathbb{R}$ 1p

iar celelalte două rădăcini sunt ale ecuației $3x^2 - (a-3)x + 3 = 0$ 1p

care vor fi și ele reale $\Leftrightarrow$ $\Delta \geq 0$, $\Delta = (a-3)^2 - 36$ $\Leftrightarrow$ $a \in (-\infty; -3] \cup [9; +\infty)$ 1p

c) Dacă $a \in (-\infty; -3] \cup [9; +\infty)$, $x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ și observând că au același semn, cum $P = x_2 \cdot x_3 = 1$ și $S = \dfrac{a-3}{3}$, ... 1p

respectiv $|x_2| + |x_3| = 2$, se obține $\dfrac{a-3}{3} \in \{-2;\ 2\}$ $\Rightarrow$ $a \in \{-3;\ 9\}$ 1p

Dacă $a \in (-3;\ 9)$ atunci $x_2, x_3 \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ și cum $x_2 \cdot x_3 = 1$, rezultă $|x_2| = |x_3| = 1$ și $|x_1| + |x_2| + |x_3| = 3$ este verificată.

În concluzie $|x_1| + |x_2| + |x_3| = 3$ $\Leftrightarrow$ $a \in [-3;\ 9]$ 1p